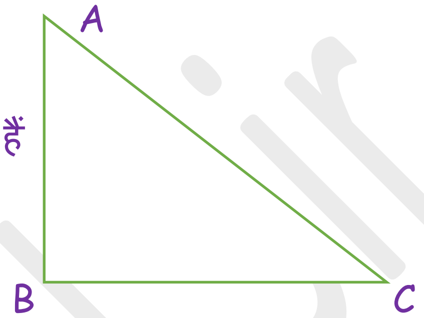
प्रश्नावली 8.1

1. △ ABC में, कोण B समकोण है, AB = 24 cm, BC = 7 cm है, निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए:

(i) sin A, cos A

(ii) sin C, cos C



हल: - दिए गए △ ABC में, $\angle B = 90^\circ$

और AB = 24 cm और BC = 7 cm

पाइथागोरस प्रमेय लागू करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$\Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2$

$\Rightarrow AC^2 = (24)^2 + 7^2$

$\Rightarrow AC^2 = 576 + 49$

$\Rightarrow AC^2 = 625^2$

$\Rightarrow AC^2 = 25^2$

$\therefore AC = 25$ cm

(i) sin A, cos A

Sin (A) = $\frac{BC}{AC} = \frac{7}{25}$

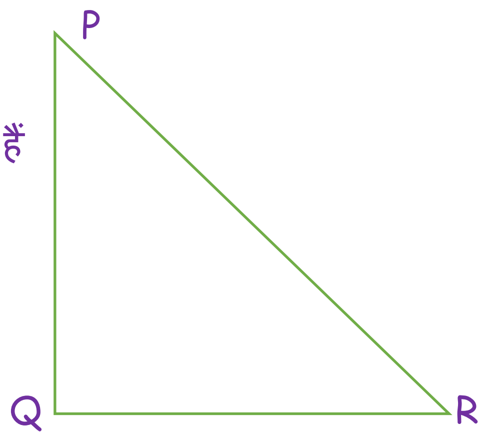
और Cos (A) = $\frac{AB}{AC} = \frac{24}{25}$

(ii) sin C, cos C

Sin (C) = $\frac{AB}{AC} = \frac{24}{25}$

और Cos (C) = $\frac{BC}{AC} = \frac{7}{25}$

2. चित्र में tan P – cot R का मान ज्ञात कीजिए ।



हल: - दिए गए △ ABC में, $\angle Q = 90^\circ$

PR = 13cm, और PQ = 12cm

पाइथागोरस प्रमेय लागू करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$\Rightarrow PR^2 = QR^2 + PQ^2$

$\Rightarrow 13^2 = QR^2 + 12^2$

$\Rightarrow 169 = QR^2 + 144$

$\Rightarrow QR^2 = 169 - 144$

$\Rightarrow QR^2 = 25$

$\Rightarrow QR = 5$

$\therefore$ The side QR = 5 cm

tan (P) = $\frac{QR}{PQ}$ = $\frac{5}{12}$

और Cot (R) = $\frac{QR}{PQ}$ = $\frac{5}{12}$

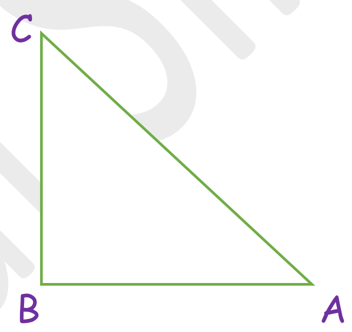
∴ tan (P) – cot (R) = $\frac{5}{12} - \frac{5}{12}$

= 0

∴tan(P) – cot(R) = 0 Ans.

3. यदि sin A = $\frac{3}{4}$, cos A और tan A की गणना करें।

हल: - दिया है: Sin A = $\frac{3}{4}$



$\Rightarrow \frac{BC}{AC} = \frac{3}{4}$

माना BC = 3k और AC = 4k,

जहाँ k एक धनात्मक वास्तविक संख्या है।

पाइथागोरस प्रमेय लागू करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$\Rightarrow AB^2 + BC^2 = AC^2$

$\Rightarrow AB^2 + (3k)^2 = (4k)^2$

$\Rightarrow AB^2 = 16k^2 - 9k^2$

$\Rightarrow AB^2 = 7k^2$

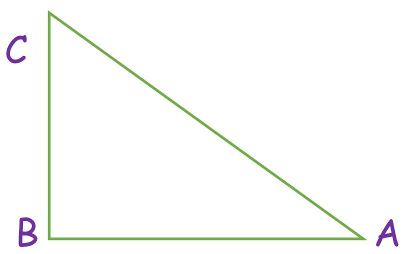
∴ AB = $\sqrt{7}k$

cos (A) = $\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{7}k}{4k} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

और tan (A) = $\frac{BC}{AB} = \frac{3k}{\sqrt{7}k} = \frac{3}{\sqrt{7}}$

4. यदि 15 cot A = 8 हो तो sin A और and sec A का मन ज्ञात करें।

हल: - दिया है: 15 cot A = 8



$\Rightarrow$ cot A = $\frac{8}{15}$

$\Rightarrow \frac{\text{Adjacent side}}{\text{Opposite side}} = \frac{8}{15}$

$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{8}{15}$

माना AB = 8k और BC = 15k,

जहाँ k एक धनात्मक वास्तविक संख्या है।

पाइथागोरस प्रमेय लागू करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$\Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2$

$\Rightarrow AC^2 = (8k)^2 + (15k)^2$

$\Rightarrow AC^2 = 64k^2 + 225k^2$

$\Rightarrow AC^2 = 289k^2$

$\therefore AC = 17k$

$\sin(A) = \frac{BC}{AC} = \frac{15k}{17k} = \frac{15}{17}$

और $\sec(A) = \frac{AC}{AB} = \frac{17k}{8k} = \frac{17}{8}$

5. यदि $\sec\theta = \frac{13}{12}$ हो तो अन्य सभी त्रिकोनिमितीय अनुपात परिकलित कीजिए।

हल: - दिया है - $\sec\theta = \frac{13}{12}$

$\Rightarrow \frac{\text{Hypotenuse}}{\text{Adjacent side}} = \frac{13}{12}$

$\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{13}{12}$

माना $AC = 13k$ और $AB = 12k$,

जहाँ k एक धनात्मक वास्तविक संख्या है।

पाइथागोरस प्रमेय लागू करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$\Rightarrow AB^2 + BC^2 = AC^2$

$\Rightarrow (12k)^2 + BC^2 = (13k)^2$

$\Rightarrow 144k^2 + BC^2 = 169k^2$

$\Rightarrow BC^2 = 169k^2 - 144k^2$

$\Rightarrow BC^2 = 25k^2$

$\Rightarrow BC = \sqrt{25}\,k$

$\therefore BC = 5k$

$\sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{5}{13}$,

$\cos\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{12}{13}$,

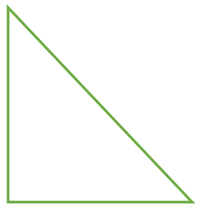
$\tan\theta = \frac{BC}{AB} = \frac{5}{12}$,

$\cot\theta = \frac{AB}{BC} = \frac{12}{5}$

और $\text{cosec}\,\theta = \frac{AC}{BC} = \frac{13}{5}$ Ans.

6. यदि ∠A और ∠B न्यून कोण हो, जहाँ cos A = cos B, तो दिखाइए कि ∠ A = ∠ B ।

हल: - त्रिभुज ABC में, ∠ C = 90^0 इस तरह है कि



cos A = cos B

$\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{BC}{AB}$

$\Rightarrow$ AC = BC

$\Rightarrow$ ∠A = ∠B (समान भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं)

7. यदि cot θ = $\frac{7}{8}$, तो (i) $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)}$ (ii) $\cot^2\theta$ का मान निकालिए।

हल: - माना △ABC में ∠B = 90° और ∠A = θ

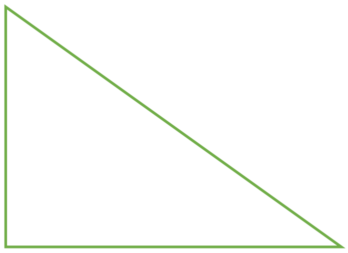
दिया है कि cot θ = $\frac{7}{8}$

$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{7}{8}$

माना AB = 7k और BC = 8k,

जहाँ k एक धनात्मक वास्तविक संख्या है।

पाइथागोरस प्रमेय लागू करने पर, हम प्राप्त करते हैं



$\Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2$

$\Rightarrow AC^2 = (7k)^2 + (8k)^2$

$\Rightarrow AC^2 = 49k^2 + 64k^2$

$\Rightarrow AC^2 = 113k^2$

$\therefore AC = \sqrt{113}\, k$

$\sin\theta = \frac{BC}{AC} = \frac{8K}{\sqrt{113}\,k} = \frac{8}{\sqrt{113}}$

और $\cos\theta = \frac{AB}{AC} = \frac{7K}{\sqrt{113}\,k} = \frac{7}{\sqrt{113}}$

(i) $\frac{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}{(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)} = \frac{(1-\sin^2\theta)}{(1-\cos^2\theta)}$

$= \frac{(1-\frac{64}{113})}{(1-\frac{49}{113})}$

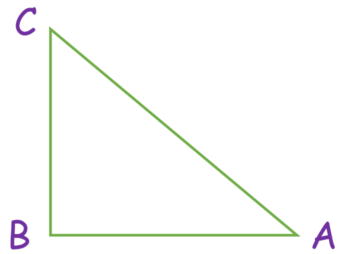
$= \frac{(\frac{113-64}{113})}{(\frac{113-49}{113})}$

$= \frac{49}{64}$ Ans.

(ii) $\cot^2\theta = \left(\frac{AB}{BC}\right)^2 = \left(\frac{7k}{8k}\right)^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{49}{64}$ Ans.

8. यदि $3cot\ A = 4$, तो जाँच कीजिए कि $\frac{(1-\tan^2 A)}{(1+\tan^2 A)} = \cos^2 A - \sin^2 A$ है या नहीं।

हल: - माना $\triangle ABC$ में $\angle B = 90°$



दिया है कि $3cot\ A = 4$

$\Rightarrow \cot A = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}$

माना AB = 4k और BC = 3k,

जहाँ k एक धनात्मक वास्तविक संख्या है।

पाइथागोरस प्रमेय लागू करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$\Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2$

$\Rightarrow (AC)^2 = (4k)^2 + (3k)^2$

$\Rightarrow (AC)^2 = 16k^2 + 9k^2$

$\Rightarrow AC^2 = 25k^2$

$\Rightarrow AC = 5k$

$\tan(A) = \frac{BC}{AB} = \frac{3k}{4k} = \frac{3}{4}$,

$\sin(A) = \frac{BC}{AC} = \frac{3k}{5k} = \frac{3}{5}$

और $\cos(A) = \frac{AB}{AC} = \frac{4k}{5k} = \frac{4}{5}$

L. H. S. = $\frac{(1-\tan^2 A)}{(1+\tan^2 A)}$

$= \frac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}$

$= \frac{1-\frac{9}{16}}{1+\frac{9}{16}}$

$= \frac{\frac{7}{16}}{\frac{25}{16}}$

$= \frac{7}{25}$

R. H. S. = $\cos^2 A - \sin^2 A$

$= \left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{5}\right)^2$

$= \frac{16}{25} - \frac{9}{25} = \frac{7}{25}$

R.H.S. = L.H.S.

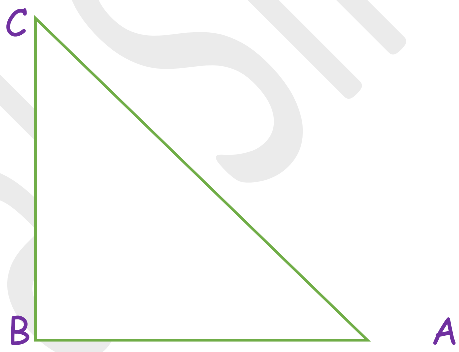
इसलिए, $\frac{(1-\tan^2 A)}{(1+\tan^2 A)} = \cos^2 A - \sin^2 A$ बराबर हैं।

9. त्रिभुज ABC में, जिसका कोण B समकोण है, यदि $tan\ A = \frac{1}{\sqrt{3}}$, तो निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए:

(i) $sinA\ cosC + cosA\ sinC$

(ii) $cosA\ cosC - sinA\ sin\ C$

हल: - त्रिभुज ABC में, $\angle B = 90°$



दिया है: $\tan A = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

माना BC = 1k और AB = √3 k,

जहाँ k एक धनात्मक वास्तविक संख्या है।

पाइथागोरस प्रमेय लागू करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$\Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2$

$\Rightarrow AC^2 = (\sqrt{3}k)^2 + k^2$

$\Rightarrow AC^2 = 3k^2 + k^2$

$\Rightarrow AC^2 = 4k^2$

$\Rightarrow AC = 2k$

(i) $\sin A = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$

और $\cos A = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

(ii) $\sin C = \frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

और $\cos C = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{2}$

(i) $\sin A \cos C + \cos A \sin C = \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$

$= 1$

(ii) $\cos A \cos C - \sin A \sin C = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

$= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4}$

$= 0$

10. ΔPQR में, जिसका कोण Q समकोण है, $PR + QR = 25$ cm और $PQ = 5$ cm है sinP, cosP और tanP के मान ज्ञात कीजिए।

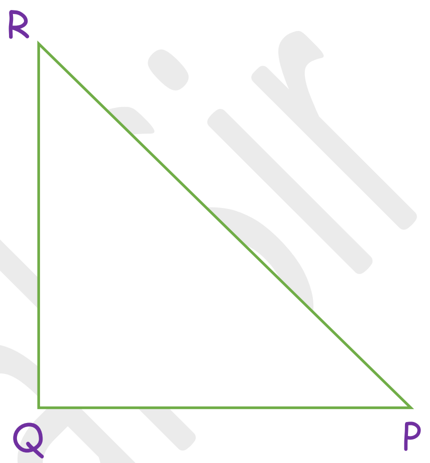
हल: - Δ PQR में, $\angle Q = 90°$,

$PR + QR = 25$ cm और $PQ = 5$ cm

माना $QR = x$

$\Rightarrow PR + x = 25$

$\Rightarrow PR = 25 - x$



पाइथागोरस प्रमेय लागू करने पर, हम प्राप्त करते हैं

$\Rightarrow PQ^2 + QR^2 = PR^2$

$\Rightarrow 5^2 + x^2 = (25 - x)^2$

$\Rightarrow 25 + x^2 = 25^2 + x^2 - 50x$

$\Rightarrow 25 + x^2 = 625 + x^2 - 50x$

$\Rightarrow x^2 - x^2 + 50x = 625 - 25$

$\Rightarrow 50x = 600$

$\Rightarrow x = \frac{600}{50}$

$\therefore x = 12$

$\therefore QR = 12$ cm

और $PR = 25 - QR$

$PR = 25 - 12$

$\therefore PR = 13$ cm

$\sin P = \frac{QR}{PR} = \frac{12}{13}$,

$\cos P = \frac{PQ}{PR} = \frac{5}{13}$

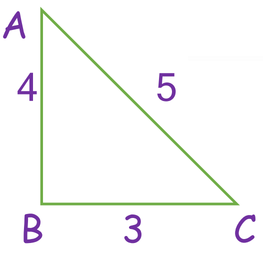
और $\tan P = \frac{QR}{PQ} = \frac{12}{5}$

$\therefore$ the values of $\sin P = \frac{12}{13}$, $\cos P = \frac{5}{13}$ और $\tan P = \frac{12}{5}$ Ans.

11. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य। कारण सहित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

(i) tan A का मान सदैव 1 से कम होता है।

हल: - असत्य



त्रिभुज ABC में, $AB = 4$, $BC = 3$ और $AC = 5$ है

$\Rightarrow \tan C = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{3}$

$\Rightarrow \frac{4}{3} = 1.333.... > 1$

(ii) कोण A के किसी मान के लिए $\sec A = \frac{12}{5}$

हल: - सत्य

त्रिभुज ABC में, $\sec C = \frac{5}{3}$

यहाँ पर कर्ण > आसन्न भुजा से

(iii) $\cos A$, कोण A के cosecant के लिए प्रयुक्त एक संक्षिप्त रूप है

हल: - असत्य

cos A कोण A के cosine के लिए प्रयुक्त संक्षिप्त नाम है जबकि cosecant के लिए प्रयुक्त संक्षिप्त रूप cosec A है।

(iv) $\cot A$, cot और A का गुणनफल होता है

हल: - असत्य

cot A, cot और A का गुणनफल नहीं है।

जब कि cot A, cotangent A के लिए प्रयुक्त संक्षिप्त नाम है।

(v) किसी भी कोण θ के लिए $\sin \theta = \frac{4}{3}$

हल: - असत्य

$\text{Sin } \theta = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}}$

हम जानते हैं कि किसी भी समकोण △ में $\text{Sin } \theta = \frac{\text{सम्मुख भुजा}}{\text{कर्ण}}$ होता है और कर्ण सबसे लंबी भुजा होती है।

∴ $\sin \theta$ हमेशा 1 से कम होगा और यह किसी भी मान के लिए कभी भी $\frac{4}{3}$ नहीं हो सकता है।

प्रश्नावली 8.2

1. निम्नलिखित के मान निकालिए:

(i) $\sin 60°\cos 30° + \sin 30°\cos 60°$

हल: - $\sin 60°\cos 30° + \sin 30°\cos 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

$= \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$

$= \frac{4}{4}$

$= 1$

$\therefore \sin 60°\cos 30° + \sin 30°\cos 60° = 1$ Ans.

(ii) $2\tan^2 45° + \cos^2 30° - \sin^2 60°$

हल: - $2\tan^2 45° + \cos^2 30° - \sin^2 60° = 2(1)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$= 2 + \frac{3}{4} - \frac{3}{4}$

$= 2$

$\therefore 2tan^2 45° + cos^2 30° - sin^2 60° = 2$ Ans.

(iii) $\frac{\cos 45°}{\sec 30° + \operatorname{cosec} 30°}$

हल: - $\frac{cos45°}{\sec 30° + cosec30°} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + 2}$

$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2 + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2(1 + \sqrt{3})}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3} + 1)}$

$= \frac{\sqrt{6}}{4(\sqrt{3} + 1)} \times \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1}$

$= \frac{\sqrt{18} - 1}{4(3 - 1)}$

$$= \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4 \times 2}$$

$$= \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{8}$$

$$\therefore \frac{cos45°}{\sec 30° + cosec30°} = \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{6}}{8} \text{ Ans.}$$

(iv) $\frac{\sin30° + \tan45° - \text{cosec}60°}{\sec30° + \cos60° + \cot45°}$

हल: - $\frac{sin30° + tan45° - cosec60°}{sec30° + cos60° + cot45°} = \frac{\frac{1}{2} + 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} + 1}$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 4}{2\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3} + 2\sqrt{3} + 4}{2\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{3\sqrt{3} - 4}{3\sqrt{3} + 4} \times \frac{3\sqrt{3} - 4}{3\sqrt{3} - 4}$$

$$= \frac{(3\sqrt{3} - 4)^2}{(3\sqrt{3})^2 - 4^2}$$

$$= \frac{(3\sqrt{3})^2 + (4)^2 - 2.3\sqrt{3}.4}{27 - 16}$$

$$= \frac{27 + 16 - 24\sqrt{3}}{27 - 16}$$

$$= \frac{43 - 24\sqrt{3}}{11}$$

$$\therefore \frac{sin30° + tan45° - cosec60°}{sec30° + cos60° + cot45°} = \frac{1}{11}(43 - 24\sqrt{3}) \text{ Ans.}$$

(v) $\frac{5\cos^2 60° + 4\sec^2 30° - \tan^2 45°}{\sin^2 30° + \cos^2 30°}$

हल: - $\frac{(5\cos^2 60° + 4\sec^2 30° - \tan^2 45°)}{(\sin^2 30° + \cos^2 30°)} = \frac{5\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 - 1^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$

$$= \frac{\frac{5}{4} + \frac{16}{3} - 1}{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}$$

$$= \frac{\frac{15+64-12}{4}}{\frac{1+3}{4}}$$

$$= \frac{\frac{79-12}{12}}{\frac{4}{4}}$$

$$= \frac{67}{12} \times \frac{4}{4}$$

$$= \frac{67}{12}$$

$\therefore \frac{5\cos^2 60° + 4\sec^2 30° - \tan^2 45°}{\sin^2 30° + \cos^2 30°} = \frac{67}{12}$ Ans.

2. सही विकल्प चुनिए और अपने विकल्प का औचित्य दीजिए:

(i) $\frac{2\tan 30°}{1+\tan^2 30°} =$

(A) $\sin 60°$ (B) $\cos 60°$ (C) $\tan 60°$ (D) $\sin 30°$

हल: - $\frac{2\tan 30°}{1+\tan^2 30°} = \frac{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$

$$= \frac{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$= \frac{2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin 60°$$

∴ सही विकल्प A है।

(ii) $\frac{1-tan^2 45°}{1+tan^2 45°} =$

(A) $tan 90°$ (B) 1 (C) $sin 45°$ (D) 0

हल: - $\frac{1-tan^2 45°}{1+tan^2 45°} = \frac{1-1^2}{1+1^2}$

$= \frac{0}{2}$

$= 0$

∴ सही विकल्प D है।

(iii) $sin 2A = 2 sin A$ तब सत्य होता है, जबकि A बराबर है:

(A) $0°$ (B) $30°$ (C) $45°$ (D) $60°$

हल: - $sin 2A = 2 sin A$

For A = $0°$

$sin 2 . 0° = 2 \sin 0°$

$sin\, 0° = 2 \sin 0°$

0 = 2 . 0

0 = 0

∴ सही विकल्प A है।

(iv) $\frac{2tan 30°}{1-tan^2 30°} =$

(A) $cos 60°$ (B) $sin 60°$ (C) $tan 60°$ (D) $sin 30°$

हल: - $\frac{2tan 30°}{1+tan^2 30°} = \frac{2 . \frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$

$= \frac{2 . \frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}$

$= \frac{2 . \frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{3}}$

$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}}$

$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2}$

$= \sqrt{3}$

= tan 60°

∴ सही विकल्प C है।

3. यदि tan (A + B) = √3 और tan (A – B) = 1/√3 ,0° < A + B ≤ 90°; A > B, तो A और B का मान ज्ञात कीजिए।

हल: - tan (A + B) = √3

⇒ tan (A + B) = tan 60° [∵ tan 60° = √3]

⇒ (A + B) = 60° … (i)

और tan (A – B) = $\frac{1}{\sqrt{3}}$

⇒ tan (A – B) = tan 30° [∵ tan 30° = $\frac{1}{\sqrt{3}}$]

⇒ (A – B) = 30° … equation (ii)

(i) और (ii), को जोड़ने पर प्राप्त होता है

A + B + A – B = 60° + 30°

⇒ 2A = 90°

∴ A = 45°

A का मान समीकरण (i) में रखने पर

45° + B = 60°

⇒ B = 60° – 45°

⇒ B = 15°

∴ A = 45° और B = 15° Ans.

4. बताइए कि निम्नलिखित में कोंन से कथन सत्य है और कोंन से असत्य। कारण सहित अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

(i) sin (A + B) = sin A + sin B.

हल: - असत्य .

कारण: माना A = 30° और B = 60°, है तो

sin (A + B) = sin (30° + 60°)
= sin 90°
= 1

और sin A + sin B = sin 30° + sin 60°

$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

यहाँ पर, sin (A + B) ≠ sin A + sin B.

∴ यह कथन असत्य है।

(ii) θ में वृदि होने के साथ sin θ के मान में भी वृदि होती है।

हल: - सत्य .

कारण: sin θ के मान इस प्रकार है:

θ→	0°	30°	45°	60°	90°
sin θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

∴ θ में वृदि होने के साथ sin θ के मान में भी वृदि होती है, सत्य है।

(iii) θ में वृदि होने के साथ cos θ के मान में भी वृदि होती है।

हल: - असत्य .

कारण: cos θ के मान इस प्रकार है:

θ→	0°	30°	45°	60°	90°
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	1

∴ θ में वृदि होने के साथ cos θ के मान में भी वृदि होती है, असत्य है।

(iv) θ के सभी मानों पर sin θ = cos θ

हल: - हम जानतें है कि

sin 90° = 1 और cos 90° = 0

यहाँ पर sin 90° ≠ cos 90°

∴ यह कथन असत्य है।

(v) *A* = 0° पर cot *A* परिभाषित नहीं है

हल: - हम जानतें है कि

cot *A* = $\frac{\cos A}{\sin A}$

$= \frac{\cos 0^\circ}{\sin 0^\circ}$

$= \frac{1}{0}$

= undefined

∴ यह कथन सत्य है।

प्रश्नावली 8.3

1. त्रिकोणमितीय अनुपातों sin A, sec A और tan A को cot A के पदों में व्यक्त कीजिए।

हल: - $\sin A = \frac{1}{\text{Cosec } A}$

$= \frac{1}{\sqrt{cosec^2 A}}$

$= \frac{1}{\sqrt{1 + cot^2 A}}$ $[cosec^2 A = 1 + cot^2 A]$

$\sec A = \sqrt{sec^2 A}$

$= \sqrt{1 + tan^2 A}$

$= \sqrt{1 + \frac{1}{cot^2 A}}$

$= \sqrt{\frac{cot^2 A + 1}{cot^2 A}}$

$= \frac{\sqrt{cot^2 A + 1}}{\cot A}$

$\tan A = \frac{1}{\cot A}$ Ans.

2. $\angle A$ के अन्य सभी त्रिकोणमितीय अनुपातों को sec A के पदों में लिखिए।

हल: - $\sin A = \sqrt{sin^2 A}$

$= \sqrt{1 - cos^2 A}$

$= \sqrt{1 - \frac{1}{sec^2 A}}$

$= \sqrt{\frac{sec^2 A - 1}{sec^2 A}}$

$= \frac{\sqrt{sec^2 A + 1}}{\sec A}$

$\cos A = \frac{1}{\sec A}$

tan A= $\sqrt{tan^2 A}$

= $\sqrt{sec^2 A - 1}$

Cot A = $\frac{1}{\tan A}$

= $\frac{1}{\sqrt{tan^2 A}}$

= $\frac{1}{\sqrt{sec^2 A - 1}}$

cosec A = $\frac{1}{\sin A}$

= $\frac{1}{\frac{\sqrt{sec^2 A + 1}}{\sec A}}$ [समीकरण (i) से sin A = $\frac{\sqrt{sec^2 A + 1}}{\sec A}$]

= $\frac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A + 1}}$

3. सही विकल्प चुनिए और अपने विकल्प की पुष्टि कीजिए:

(i) 9 $sec^2 A$ – 9 $tan^2 A$ =

(A) 1   (B) 9   (C) 8   (D) 0

हल: - 9 $sec^2 A$ - 9 $tan^2 A$ = 9 ($sec^2 A$ – $tan^2 A$)

= 9 × 1 (∵ $sec^2 A$ – $tan^2 A$ = 1)

= 9

∴ सही विकल्प B है।

(ii) (1 + tan θ + sec θ) (1 + cot θ – cosec θ)

(A) 0   (B) 1   (C) 2   (D) – 1

हल: - (1 + tan θ + sec θ) (1 + cot θ – cosec θ)

$$=\left(1 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta}\right)\left(1 + \frac{\cos\theta}{\sin\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\right)$$

$$= \left(\frac{\cos\theta+\sin\theta+1}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta}\right)$$

$$= \left(\frac{sin^2\theta + cos^2\theta+2\cos\theta.\ \sin\theta-1}{\cos\theta.\ \sin\theta}\right)$$

$= \left(\frac{1+2\cos\theta.\ \sin\theta-1}{\cos\theta.\ \sin\theta}\right)$

$= \left(\frac{2\cos\theta.\ \sin\theta}{\cos\theta.\ \sin\theta}\right)$

= 2

∴ सही विकल्प C है।

(iii) (sec A + tan A) (1 – sin A) =

(A) sec A (B) sin A (C) cosec A (D) cos A

हल: - (sec A + tan A) (1 – sin A)

$= \left(\frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}\right)(1 - \sin A)$

$= \left(\frac{1+\sin A}{\cos A}\right)(1 - \sin A)$

$= \frac{(1+\sin A)(1-\sin A)}{\cos A}$

$= \frac{(1-sin^2 A)}{\cos A}$

$= \frac{cos^2 A}{\cos A}$

= cos A

∴ सही विकल्प D है।

(iv) $\frac{1+tan^2 A}{1+cot^2 A}$ =

(A) sec^2 A (B) -1 (C) cot^2A (D) tan^2A

हल: - $\frac{1+tan^2 A}{1+cot^2 A} = \frac{sec^2 A}{cosec^2 A}$

$= \frac{sin^2 A}{cos^2 A}$

= tan^2A

∴ सही विकल्प D है।

4. निम्नलिखित सर्वसमिकाएँ सिध्द कीजिए, जहाँ वे कोण, जिनके लिए व्यंजक परिभाषित है, न्यून कोण है:

(i) $(\text{cosec}\ \theta - \cot\theta)^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

हल: - R.H.S. = $\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$

$= \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} \times \frac{1-\cos\theta}{1-\cos\theta}$

$= \frac{(1-\cos\theta)^2}{1-\cos^2\theta}$

$= \frac{(1-\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}$

$= \left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$

$= \left(\frac{1}{\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2$

$= (\text{cosec}\ \theta - \cot\theta)^2$

= L.H.S

$\therefore$ $(\text{cosec}\ \theta - \cot\theta)^2 = \frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}$ सिध्दम।

(ii) $\frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A} = 2\sec A$

हल: - L.H.S. = $\frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A}$

$= \frac{\cos^2 A + (1+\sin A)^2}{(1+\sin A)\cos A}$

$= \frac{\cos^2 A + 1 + \sin^2 A + 2\sin A}{(1+\sin A)\cos A}$ $[(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab]$

$= \frac{\cos^2 A + \sin^2 A + 1 + 2\sin A}{(1+\sin A)\cos A}$

$= \frac{1 + 1 + 2\sin A}{(1+\sin A)\cos A}$

$$= \frac{2+2\sin A}{(1+\sin A)\cos A}$$

$$= \frac{2(1+\sin A\ )}{(1+\sin A)\cos A}$$

$$= \frac{2}{\cos A}$$

= 2 sec A

= R.H.S.

$\therefore \frac{\cos A}{1+\sin A} + \frac{1+\sin A}{\cos A}$ = 2 sec A सिध्दम।

(iii) $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}$ = 1 + sec θ cosec θ

हल: - L.H.S. = $\frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta}$

$$= \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}} + \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta}} + \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{\cos\theta-\sin\theta}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta}} + \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{-(-\cos\theta+\sin\theta)}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{\frac{\sin\theta-\cos\theta}{\sin\theta}} - \frac{\frac{\cos\theta}{\sin\theta}}{\frac{(\sin\theta-\cos\theta)}{\cos\theta}}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\frac{\sin\theta}{(\sin\theta-\cos\theta)} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\cos\theta}{(\sin\theta-\cos\theta)}$$

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)} - \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta(\sin\theta-\cos\theta)}$$

$$= \frac{\sin^3\theta-\cos^3\theta}{\cos\theta\sin\theta(\sin\theta-\cos\theta)}$$

$$= \frac{(\sin\theta - \cos\theta)(\sin^2\theta + \cos^2\theta + \cos\theta\sin\theta)}{\cos\theta\sin\theta(\sin\theta - \cos\theta)}$$

$[a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)]$

$$= \frac{(1 + \cos\theta\sin\theta)}{\cos\theta\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{\cos\theta\sin\theta} + \frac{\cos\theta\sin\theta}{\cos\theta\sin\theta}$$

$= \sec\theta \operatorname{cosec}\theta + 1$

$\therefore \frac{\tan\theta}{1-\cot\theta} + \frac{\cot\theta}{1-\tan\theta} = 1 + \sec\theta \operatorname{cosec}\theta$ सिध्दम।

(iv) $\frac{1 + \sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1 - \cos A}$

हल: - L.H.S. $= \frac{1 + \sec A}{\sec A}$

$$= \frac{1 + \frac{1}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}}$$

$$= \frac{\frac{\cos A + 1}{\cos A}}{\frac{1}{\cos A}}$$

$$= \frac{\cos A + 1}{\cos A} \times \frac{\cos A}{1}$$

$= \cos A + 1$

$$= (1 + \cos A) \times \frac{1 - \cos A}{1 - \cos A}$$

$$= \frac{1 - \cos^2 A}{1 - \cos A}$$

$$= \frac{\sin^2 A}{1 - \cos A}$$

$\therefore \frac{1 + \sec A}{\sec A} = \frac{\sin^2 A}{1 - \cos A}$ सिध्दम।

(v) सर्वसमिका $cosec^2 A = 1 + cot^2 A$ को लागू करके $\frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = cosec\, A + cot\, A$

हल: - L.H.S. = $\frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1}$

अंश और हर को sin A से भाग देने पर, प्राप्त होता है

$= \frac{\cot A - 1 + \operatorname{cosec} A}{\cot A + 1 - \operatorname{cosec} A}$

$= \frac{\cot A - (cosec^2 A - cot^2 A) + \operatorname{cosec} A}{\cot A + 1 - \operatorname{cosec} A}$ (using $cosec^2 A - cot^2 A = 1$)

$= \frac{\cot A + \operatorname{cosec} A - (cosec^2 A - cot^2 A)}{\cot A + 1 - \operatorname{cosec} A}$

$= \frac{\cot A + \operatorname{cosec} A - (\operatorname{cosec} A + \cot A)(\operatorname{cosec} A - \cot A)}{\cot A + 1 - \operatorname{cosec} A}$

$= \frac{(\cot A + \operatorname{cosec} A)(1 - \operatorname{cosec} A + \cot A)}{\cot A + 1 - \operatorname{cosec} A}$

$= \cot A + \operatorname{cosec} A$

= R.H.S.

$\therefore \frac{\cos A - \sin A + 1}{\cos A + \sin A - 1} = \operatorname{cosec} A + \cot A$ सिध्दम।

(vi) $\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$

हल: - L.H.S. = $\sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}}$

$= \sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A} \times \frac{1+\sin A}{1+\sin A}}$

$= \sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{1-\sin^2 A}}$

$= \sqrt{\frac{(1+\sin A)^2}{\cos^2 A}}$

$= \frac{1+\sin A}{\cos A}$

$= \frac{1}{\cos A} + \frac{\sin A}{\cos A}$

$= \sec A + \tan A$

$\therefore \sqrt{\frac{1+\sin A}{1-\sin A}} = \sec A + \tan A$ सिध्दम।

(vii) $\frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$

हल: - L.H.S. $= \frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta}$

$= \frac{\sin\theta(1 - 2\sin^2\theta)}{\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)}$

$= \frac{\sin\theta[1 - 2(1-\cos^2\theta)]}{\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)}$

$= \frac{\sin\theta[1 - 2+2\cos^2\theta)]}{\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)}$

$= \frac{\sin\theta[2\cos^2\theta - 1]}{\cos\theta(2\cos^2\theta - 1)}$

$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

$= \tan\theta$

= R.H.S

$\therefore \frac{\sin\theta - 2\sin^3\theta}{2\cos^3\theta - \cos\theta} = \tan\theta$ सिध्दम।

(viii) $(\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

हल: - L.H.S. $= (\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2$

$= \sin^2 A + \operatorname{cosec}^2 A + 2\sin A \operatorname{cosec} A + \cos^2 A + \sec^2 A + 2\cos A \sec A$

$= \sin^2 A + \cos^2 A + 1 + \cot^2 A + 2\sin A \frac{1}{\sin A} + 1 + \tan^2 A + 2\cos A \frac{1}{\cos A}$

$= 1 + 1 + \cot^2 A + 2 + 1 + \tan^2 A + 2$

$= 7 + \tan^2 A + \cot^2 A$

= R.H.S.

$\therefore (\sin A + \operatorname{cosec} A)^2 + (\cos A + \sec A)^2 = 7 + \tan^2 A + \cot^2 A.$ सिध्दम।

(ix) $(\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \frac{1}{\tan A + \cot A}$

हल: - L.H.S. = $(\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A)$

$$= \left(\frac{1}{\sin A} - \sin A\right)\left(\frac{1}{\cos A} - \cos A\right)$$

$$= \left(\frac{1 - \sin^2 A}{\sin A}\right)\left(\frac{1 - \cos^2 A}{\cos A}\right)$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\sin A} \times \frac{\sin^2 A}{\cos A}$$

$$= \cos A \sin A$$

Now, R.H.S. = $\frac{1}{\tan A + \cot A}$

$$= \frac{1}{\frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A}}$$

$$= \frac{1}{\frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos A .\sin A}}$$

$$= \frac{\cos A .\sin A}{\sin^2 A + \cos^2 A}$$

$$= \frac{\cos A .\sin A}{1}$$

$$= \cos A \sin A$$

$\Rightarrow$ L.H.S. = R.H.S.

$\therefore (\operatorname{cosec} A - \sin A)(\sec A - \cos A) = \frac{1}{\tan A + \cot A}$ सिध्दम।

(x) $\frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A} = \left(\frac{1 - \tan A}{1 - \cot A}\right)^2 = \tan^2 A$

हल: - L.H.S. = $\frac{1 + \tan^2 A}{1 + \cot^2 A}$

$$= \frac{\sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A}$$

$= \frac{\sin^2 A}{\cos^2 A}$

$= \tan^2 A$

$\therefore \frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A} = \tan^2 A$ सिध्दम।

L.H.S. $= \left(\frac{1-\tan A}{1+\cot A}\right)^2$

$= \left(\frac{1-\frac{\sin A}{\cos A}}{1+\frac{\cos A}{\sin A}}\right)^2$

$= \left(\frac{\frac{\cos A-\sin A}{\cos A}}{\frac{\sin A-\cos A}{\sin A}}\right)^2$

$= \left(\frac{\cos A-\sin A}{\cos A} \times \frac{\sin A}{\sin A-\cos A}\right)^2$

$= \left(\frac{(\cos A-\sin A)}{\cos A} \times \frac{\sin A}{-(\cos A-\sin A)}\right)^2$

$= \left(\frac{-\sin A}{\cos A}\right)^2$

$= (-\tan A)^2$

$= \tan^2 A$

$\therefore \frac{1+\tan^2 A}{1+\cot^2 A} = \left(\frac{1-\tan A}{1+\cot A}\right)^2 = \tan^2 A$ सिध्दम।